**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**Занятие 4**

**4.1. Линейные уравнения второго порядка.**

**Определение 4.1.** Функции называются линейно независимыми на интервале , если В противном случае они называются линейно зависимыми.

**Определение 4.2.** Определителем Вронского функций называется определитель

*.* (4.1)

Справедлива следующая легко проверяемая

**Теорема 4.1.** Если функциилинейно зависимы на интервале , то их определитель Вронского равен нулю на этом интервале.

**Замечание 4.1.** Отметим, что если на интервале функциилинейно независимы, то из этого не следует, что их определитель Вронского на этом интервале тождественно не равен нулю.

Например, легко проверить, что для линейно независимых функций и определитель Вронского тождественно равен нулю.

**Определение 4.3.** Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) второго порядка называется уравнение вида

(4.2)

где - заданные функции.

Если , то уравнение называется *однородным* (ЛОДУ).В противномслучае оно называется *неоднородным.*

Если являются константами, то уравнение (4.2) называется *уравнением с постоянными коэффициентами*. В противном случае оно называется *уравнением с переменными коэффициентами.*

Рассмотрим сначала однородное уравнение

(4.3)

**Теорема 4.2.** Пусть - линейно независимые решения уравнения (4.3) на интервале . Тогда на всём этом интервале их определитель Вронского (4.1) не обращается в нуль.

**Теорема 4.3.** Пусть - линейно независимые решения уравнения (4.3). Тогда общее решение этого уравнения имеет вид:

где и - произвольные константы.

То, что является решением уравнения (4.3), очевидно. А то, что оно является общим решением, вытекает из теоремы 4.2.

Перейдём к неоднородному уравнению (4.2).

**Теорема 4.4.** Общее решение неоднородного уравнения (4.2) имеет вид: где - общее решение однородного уравнения (4.3), а - некоторое частное решение неоднородного уравнения (4.3).

То, что является решением уравнения (4.3), очевидно. А то, что оно является общим решением, вытекает из теоремы 4.2.

**Теорема 4.5.** (Принцип суперпозиции). Если являются соответственно решениями уравнений

и

то их сумма будет решением уравнения

**4.2. Решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.**

Нахождение линейно независимых решений уравнения (4.3) с переменными коэффициентами является, вообще говоря, неразрешимой задачей. Но для уравнений с постоянными коэффициентами задача решается в общем виде.

Рассмотрим уравнение

, (4.4)

где константы.

Будем искать решение уравнения (4.4) в виде . Тогда

, . Подставив в уравнение (4.4) и сократив его на , для получим так называемое *характеристическое уравнение* (4.5)

1) Пусть . Тогда уравнение (4.5) имеет два различных вещественных корня . Тогда и - линейно независимые решения уравнения (4.4) и, следовательно, функция является общим решением уравнения (4.4).

2) Пусть . Тогда уравнение (4.5) имеет один корень , и функция является решением уравнения (4.4). Можно проверить, что в этом случае функция тоже является решением уравнения (4.4). Очевидно, функции линейно независимы, следовательно, функция

является общим решением уравнения (4.4).

3) Пусть Тогда корни уравнения (4.4)

являются комплексными. Возьмём один из этих корней Функция является комплекснозначным решением уравнения (4.4). Нетрудно проверить, что вещественная и мнимая части этой функции

и являются решениями уравнения (4.4). Поскольку эти функции линейно независимы, то функция является общим решением уравнения (4.4).

**Пример 4.1.** Решить задачу Коши

*Решение.* Характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня и Тогда общее решение уравнения имеет вид: . Чтобы найти константы и , при которых решение удовлетворяет начальным условиям, продифференцируем общее решение: . Тогда:

0ткуда находим: Подставляя в общее решение, находим решение задачи Коши: .

**Пример 4.2.** Решить уравнение .

*Решение.* Характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня и Тогда общее решение уравнения имеет вид:

**Пример 4.3.** Решить уравнение .

*Решение.* Характеристическое уравнение имеет один корень . Тогда функция является решением уравнения; другим, линейно независимым с этим решением, является функция

(см. пункт 2)). Следовательно, общее решение имеет вид: .

**Пример 4.4.** Решить уравнение .

*Решение.* Корни характеристического уравнения являются комплексными: . Тогда линейно независимыми решениями уравнения являются функции

и (см. пункт 3)). Тогда общее решение имеет вид: .

**Пример 4.5.** Решить уравнение .

*Решение.* Корни характеристического уравнения являются комплексными: . Тогда линейно независимыми решениями уравнения являются функции

и (см. пункт 3)). Тогда общее решение имеет вид: .

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения и задачи Коши:

1) 2)

3) 4)

5)

**4.3. Решение неоднородных уравнений. Метод вариации постоянных.**

Пусть линейно независимые решения однородного уравнения (4.3). Тогда общее решение неоднородного уравнения (4.2) будем искать в виде

, (4.6)

где и неизвестные функции. Вычислим первую производную функции ; при этом наложим условие

Затем вычислим вторую производную и подставим в уравнение (4.2). Тогда в силу того, что линейно независимые решения однородного уравнения (4.3), с учётом наложенного условия получим систему линейных алгебраических уравнений относительно :

(4.7)

Главный определитель этой системы равен определителю Вронского

линейно независимых решений уравнения (4.3) и, следовательно, отличен от нуля (см. теорему 4.2). Тогда система (4.7) имеет единственное решение. По теореме Крамера получим:

Проинтегрировав, получим:

где и - произвольные константы. Подставив в (4.6), получим общее решение уравнения (4.2):

.

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим:

В соответствии с теоремами 4.2 и 4.3 общее решение уравнения (4.2) равно сумме общего решения уравнения 4.3 и частного решения уравнения (4.2).

**Пример 4.6.** Решить уравнение .

Найдём линейно независимые решения однородного уравнения

Решением его характеристического уравнения являются числа и Тогда функции и являются линейно независимыми решениями однородного уравнения.

Будем искать решение Неоднородного уравнения в виде

.

Из системы

(см. (4.7)) получим:

+.

Для вычисления последнего интеграла разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей.

откуда, положив , получим положив получим . Тогда

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

++(, или

**Задачи для самостоятельного решения*.***

Решить уравнения:

1) 2) ;

3) ; 4) .